Bûche Study

FICHE DE RÉVISION · PRÉPA (CPGE) · MP, PC, PSI, PT, TSI · MATHS

Systèmes différentiels linéaires

Fiche écrite par IA à partir du chapitre « Équations et systèmes différentiels linéaires (prépa, deuxième année) » de la bibliothèque Bûche Study. Vérifie toujours avec ton cours et ton professeur. Le cours complet, les QCM et les cartes mémoire sont dans l'appli.

1 Le cadre et le théorème de Cauchy

Système et équation d'ordre n

- (S) **$X' = A(t)X + B(t)$**, avec A et B **continues** sur I ; homogène (H) : $X' = A(t)X$.
- Une équation $y^{(n)} + \dots + a_0 y = b$ devient un système d'ordre 1 pour $X = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ avec la **matrice compagnon**.
- Exemple : $y'' + 2y' + 5y = 0 \leftrightarrow X' = (0\ 1\ ;\ -5\ -2)\ X$.

Cauchy linéaire et structure

- Pour tout (t_0, X_0), solution **unique**, définie sur **tout I** (spécificité du linéaire).
- Solutions de (H) : espace vectoriel de **dimension n** ($X \mapsto X(t_0)$ est un isomorphisme).
- Solutions de (S) : **$X = X_p + X_h$** (espace affine).

2 Wronskien

Formule de Liouville

- $W(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$ vérifie **$W' = \mathrm{tr}(A(t))\cdot W$**.
- Donc W est **identiquement nul ou jamais nul** : base $\iff$ **$W(t_0) \neq 0$** en un point.
- A constante : $W(t) = W(0)\cdot e^{t\cdot \mathrm{tr}\,A}$.

Ordre 2

- $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$: **$W = y_1y_2' - y_1'y_2$**, $W' = -aW$.
- **Lagrange** : connaissant y_1, poser $y = y_1 z$ donne une équation du 1er ordre en z'.
- **Variation des constantes** : $\lambda_1'y_1 + \lambda_2'y_2 = 0$ et $\lambda_1'y_1' + \lambda_2'y_2' = c$, d'où $\lambda_1' = -y_2c/W$, $\lambda_2' = y_1c/W$.

3 Coefficients constants : exponentielle de matrice

Définition et propriétés

- **$e^A = \Sigma\, A^k / k!$** (série absolument convergente).
- Si **$AB = BA$** : $e^{A+B} = e^A e^B$; e^A est inversible, d'inverse e^{-A}.
- $A = PDP^{-1} \Rightarrow e^A = P e^D P^{-1}$, $e^D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_i})$.
- $(e^{tA})' = A\, e^{tA}$; $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}\,A}$.

Solution de X' = AX

- **$X(t) = e^{tA} X_0$**.
- A diagonalisable : **$X = \Sigma\, c_i\, e^{\lambda_i t} V_i$** (modes propres).
- Non diagonalisable : $A = D + N$ ($DN = ND$, N nilpotente), $e^{tA} = e^{tD}(I + tN + \dots)$: termes en **$t^k e^{\lambda t}$**.
- Valeurs propres $\alpha \pm i\beta$: termes **$e^{\alpha t}\cos \beta t$** et **$e^{\alpha t}\sin \beta t$**.

En dimension 2

- $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det A$.
- Racine double λ : $N = A - \lambda I$ vérifie $N^2 = 0$ (Cayley-Hamilton), **$e^{tA} = e^{\lambda t}(I + tN)$**.
- Exemple : $A = (3\ 1\ ;\ -1\ 1)$, $\chi = (X - 2)^2$, $e^{tA} = e^{2t}(1+t\ t\ ;\ -t\ 1-t)$.

Second membre

- A constante : **$X(t) = e^{tA}(X_0 + \int_0^t e^{-sA} B(s)\, ds)$**.
- Coefficients variables : $X = \Sigma\, \lambda_i(t) X_i$ avec $\Sigma\, \lambda_i' X_i = B$ (système de Cramer de déterminant $W \neq 0$).

4 Stabilité et applications

Valeurs propres de A (dimension 2)	Équilibre en 0	Allure
réelles < 0	nœud stable	décroissance exponentielle
réelles de signes opposés (det A < 0)	col, instable	trajectoires qui s'éloignent
complexes, Re < 0	foyer stable	spirale convergente
imaginaires pures (tr A = 0, det A > 0)	centre	trajectoires périodiques

Critère

- Asymptotiquement stable $\Longleftrightarrow$ **$\mathrm{Re}\,\lambda < 0$** pour toutes les valeurs propres.
- En dimension 2 : $\Longleftrightarrow$ **$\mathrm{tr}\,A < 0$ et $\det A > 0$**.

Oscillateurs couplés

- $X'' = MX$ avec $M = (-2\ 1\ ;\ 1\ -2)$: valeurs propres -1 et -3.
- Modes propres $u = x_1 + x_2$ ($\omega = 1$, en phase) et $v = x_1 - x_2$ ($\omega = \sqrt{3}$, en opposition).

5 Les erreurs à éviter

Sur l'exponentielle

- $e^{A+B} = e^A e^B$ **sans vérifier** que A et B commutent.
- Prendre l'exponentielle de chaque coefficient.
- Écrire $e^A X_0$ au lieu de **$e^{tA} X_0$**.

Sur la structure

- Dimension des solutions : **n**, pas n^2.
- Oublier la solution particulière avec un second membre.
- Oublier la condition $\Sigma\, \lambda_i' y_i = 0$ dans la variation des constantes.