Bûche Study

FICHE DE RÉVISION · PRÉPA (CPGE) · MP, PC, PSI, PT, TSI · MATHS

Séries entières

Fiche écrite par IA à partir du chapitre « Séries entières (prépa, deuxième année) » de la bibliothèque Bûche Study. Vérifie toujours avec ton cours et ton professeur. Le cours complet, les QCM et les cartes mémoire sont dans l'appli.

1 Rayon de convergence

Définition

- **Lemme d'Abel** : si $(a_n z_0^n)$ est bornée, $\Sigma a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < |z_0|$.
- **$R = \sup\{r \geq 0 : (a_n r^n) \text{ bornée}\}$**.
- $|z| < R$: convergence absolue ; $|z| > R$: **divergence grossière** ; $|z| = R$: on ne sait pas.
- $\Sigma n!z^n$: $R = 0$; Σz^n : $R = 1$; $\Sigma z^n/n!$: $R = +\infty$.

Calculer R

- **D'Alembert** : $|a_{n+1}/a_n| \to \ell \Rightarrow R = 1/\ell$.
- **Comparaison** : $a_n = O(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$; $a_n \sim b_n \Rightarrow$ même rayon.
- $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma n a_n x^n$ et $\Sigma a_n x^{n+1}/(n+1)$ ont le **même rayon**.
- **Lacunaire** : d'Alembert sur $|a_n x^{2n}|$. Ex. $\Sigma x^{2n}/4^n$: $x^2/4 < 1 \iff |x| < 2$.

2 Opérations et régularité

Opérations

- Somme : $R \geq \min(R_a, R_b)$, égalité si $R_a \neq R_b$.
- **Produit de Cauchy** : $c_n = \Sigma_{k \leq n} a_k b_{n-k}$, $R \geq \min(R_a, R_b)$.
- Ex. $(\Sigma x^n)^2 = \Sigma (n+1)x^n = 1/(1-x)^2$.

La somme S

- **Continue** sur le disque ouvert, **C∞** sur $]-R, R[$.
- Dérivation et intégration **terme à terme**, même rayon.
- Coefficients uniques : **$a_n = S^{(n)}(0)/n!$**.
- **Abel radial** : si la série converge en R, $S(x) \to \Sigma a_n R^n$ quand $x \to R^-$ (d'où $\Sigma (-1)^{n-1}/n = \ln 2$).

3 Développements usuels

Fonction	Développement en 0	Rayon
e^x	$\Sigma x^n/n!$	$+\infty$
$\cos x$, $\sin x$	$\Sigma (-1)^n x^{2n}/(2n)!$, $\Sigma (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$	$+\infty$
$\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$	$\Sigma x^{2n}/(2n)!$, $\Sigma x^{2n+1}/(2n+1)!$	$+\infty$
$1/(1-x)$	Σx^n	1
$\ln(1+x)$	$\Sigma_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x^n/n$	1
$-\ln(1-x)$	$\Sigma_{n \geq 1} x^n/n$	1
$\arctan x$	$\Sigma (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)$	1
$(1+x)^\alpha$	$1 + \Sigma \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n/n!$	1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$

Sommes classiques

- $\sum_{n\geq 1} nx^n = x/(1-x)^2 \Rightarrow \sum n/2^n = \mathbf{2}$.
- $\sum_{n\geq 1} n^2x^n = x(1+x)/(1-x)^3 \Rightarrow \sum n^2/2^n = \mathbf{6}$.
- $\sum (-1)^n/(2n+1) = \mathbf{\pi/4}$ (Leibniz).

Pourquoi R = 1 pour $1/(1+x^2)$?

- Le rayon est la distance de 0 à la **singularité complexe** la plus proche : ici ±i.
- Série génératrice : le rayon est l'inverse du taux de croissance (Fibonacci : R = 1/φ).

4 Développer une fonction

Méthode 1 : opérations

- Combinaisons, produit de Cauchy, substitution ($x \to x^2$, $-x$, $2x$), dérivation, intégration, éléments simples.
- Ex. $1/((1-x)(1-2x)) = \sum (2^{n+1}-1)x^n$ pour $|x| < 1/2$.

Méthode 2 : équation différentielle

- Trouver une équation vérifiée par f, chercher $y = \sum a_n x^n$, identifier → récurrence.
- Ex. $y' + 2xy = 0$, $y(0) = 1$: $(n+1)a_{n+1} = -2a_{n-1} \Rightarrow y = e^{-x^2}$.
- Conclure par **unicité** (Cauchy) et donner le rayon.

5 Les erreurs à éviter

Sur le rayon

- D'Alembert sur les a_n d'une série **lacunaire**.
- Conclure sur le bord $|z| = R$ sans l'étudier.
- Rayon d'un produit : **≥** min, pas égal.

Sur les développements

- Utiliser $\sum x^n = 1/(1-x)$ hors de $|x| < 1$.
- Oublier le décalage d'indice : $S' = \sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1}$.
- Signe : $\ln(1-x) = -\sum x^n/n$.