



Primitives : formulaire

Fiche écrite par IA à partir du chapitre « Primitives et équations différentielles » de la bibliothèque Bûche Study. Vérifie toujours avec ton cours et ton professeur. Le cours complet, les QCM et les cartes mémoire sont dans l'appli.

1 Définition

■ Primitive

- F est une primitive de f sur un intervalle I si $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I .
- Toute fonction **continue** sur un intervalle admet des primitives.
- Pour vérifier une primitive : **on dérive F** et on retrouve f .

■ Toutes les primitives

- Si F est une primitive de f , les primitives de f sont les $F + C$ (C constante réelle).
- Avec une condition $F(x_0) = y_0$, il y a **une seule** primitive.
- Exemple : primitive de $e^{-x} + 2x$ telle que $F(0) = 3$: $F(x) = -e^{-x} + x^2 + C$, $F(0) = -1 + C = 3$, donc **$C = 4$** .

2 Primitives des fonctions de référence

$f(x)$	Une primitive $F(x)$	Sur
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x	$x^2/2$	$\mathbb{R}$
x^n (n entier, $n \geq 0$)	$x^{n+1}/(n+1)$	$\mathbb{R}$
$1/x^2$	$-1/x$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty[$
$1/x$	$\ln x$	$] 0 ; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

Linéarité : une primitive de $4x^3 - 6x + 5$ est $x^4 - 3x^2 + 5x$. **Attention** : il n'y a pas de formule pour un produit ou un quotient. Une primitive de $x e^x$ n'est pas $(x^2/2) e^x$.

3 Les formes composées

Fonction	Une primitive	Condition
$u' u^n \ (n \geq 0)$	$u^{n+1}/(n+1)$	aucune
u'/u^2	$-1/u$	u ne s'annule pas
$u'/\sqrt{u}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
u'/u	$\ln u$	$u > 0$
$u' e^u$	e^u	aucune
$u' \cos u$	$\sin u$	aucune
$u' \sin u$	$-\cos u$	aucune
$f(ax+b), a \neq 0$	$(1/a) F(ax+b)$	F primitive de f

La méthode

- Repérer la fonction « intérieure » u (dans l'exponentielle, sous la racine, au dénominateur...).
- Calculer u' et le comparer au facteur présent.
- Ajuster avec une **constante** (jamais avec un x).
- Appliquer le tableau, puis **vérifier en dérivant**.

Exemples

- $x e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2}$: primitive $\frac{1}{2} e^{x^2}$.
- $3x/(x^2+4) = (3/2) \times 2x/(x^2+4)$: primitive $(3/2) \ln(x^2+4)$.
- e^{3x} : primitive $(1/3) e^{3x}$; $\cos(2x)$: primitive $\frac{1}{2} \sin(2x)$.

4 Équations différentielles

$y' = ay$

- Solutions : $y = C e^{ax}$, C réel.
- Une condition $y(x_0) = y_0$ donne une seule solution.
- Exemple : $N' = -\lambda N$, $N(0) = N_0$ donne $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$; demi-vie $t = \ln 2 / \lambda$.

$y' = ay + b \ (a \neq 0)$

- Solution constante : $-b/a$ (l'équilibre).
- Solutions : $y = C e^{ax} - b/a$.
- Si $a < 0$, toutes les solutions tendent vers $-b/a$.
- Café : $\theta' = -0,1\theta + 2$, $\theta(0) = 80$ donne $\theta(t) = 60 e^{-0,1t} + 20$.

$y' = ay + f$

- Si g_0 est une solution particulière, les solutions sont $g_0 + C e^{ax}$.
- Au bac : vérifier g_0 , montrer que $g - g_0$ est solution de $y' = ay$, conclure, puis trouver C .