



Loi de Bernoulli et loi binomiale

Fiche écrite par IA à partir du chapitre « Probabilités » de la bibliothèque Bûche Study. Vérifie toujours avec ton cours et ton professeur. Le cours complet, les QCM et les cartes mémoire sont dans l'appli.

1 Épreuves indépendantes et arbre pondéré

■ Le principe

- Des épreuves sont **indépendantes** si le résultat de l'une n'influence pas les autres (lancers successifs, tirages **avec remise**).
- La probabilité d'une issue est le **produit** des probabilités de ses étapes.
- Sur un arbre, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches.

■ Exemple et piège

- Un dé puis une pièce : $P(\text{« 6 puis Pile »}) = 1/6 \times 1/2 = \mathbf{1/12}$.
- Sans remise** dans une petite urne, la composition change : les branches du 2^e niveau sont des probabilités conditionnelles, les épreuves ne sont pas indépendantes.

2 Épreuve et loi de Bernoulli

■ Définition

- Une **épreuve de Bernoulli** a deux issues : **succès** (probabilité p) et **échec** (probabilité $1 - p$).
- X vaut 1 en cas de succès, 0 sinon : X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p .
- Exemples : obtenir 6 avec un dé ($p = 1/6$), tirer une pièce défectueuse ($p = 0,05$).

■ Espérance et variance

- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1 - p)$

3 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

■ Définitions

- Schéma de Bernoulli** : n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**.
- $X = \text{nombre de succès}$ suit la **loi binomiale** $B(n; p)$, de valeurs $0, 1, \dots, n$.
- $P(X = k) = C(n, k) \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$, où $C(n, k)$ (« k parmi n ») compte les chemins à k succès.

■ Justifier au bac (4 points)

- Une épreuve à deux issues : succès « ... » de probabilité p = ...
- Répétée n fois de façon identique et indépendante.
- X compte le nombre de succès.
- Donc X suit $B(n; p)$.

4 Calculer avec la loi binomiale

■ À la calculatrice

- « binomFdp » donne $P(X = k)$, « binomFRép » donne $P(X \leq k)$.
- $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a - 1)$
- Au moins un succès** : $P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$.

■ Espérance, variance

- $E(X) = np$: le nombre moyen de succès.
- $V(X) = np(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.
- Exemple : QCM de 10 questions à 4 choix au hasard, X suit $B(10; 0,25)$, $E(X) = 2,5$ et $P(X \geq 1) = 1 - 0,75^{10} \approx 0,944$.

■ Erreurs fréquentes

- Oublier le coefficient $C(n, k)$: $p^k(1-p)^{n-k}$ est la probabilité d'**un seul** chemin.
- $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$, et non $1 - P(X \leq 3)$.
- Problème de seuil : en divisant par $\ln q$ avec $0 < q < 1$, **le sens de l'inégalité change**.