



Logarithme népérien

Fiche écrite par IA à partir du chapitre « Fonction logarithme » de la bibliothèque Bûche Study. Vérifie toujours avec ton cours et ton professeur. Le cours complet, les QCM et les cartes mémoire sont dans l'appli.

1 Définition et lien avec l'exponentielle

■ La définition

- Pour tout réel $a > 0$, $\ln a$ est l'unique réel x tel que $e^x = a$.
- $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$: $\ln 0$ et $\ln(-3)$ n'existent pas.
- $y = e^x \iff x = \ln y$: $\ln$ est la fonction réciproque de $\exp$.

■ À connaître par cœur

- $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x , et $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$.
- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
- $\ln 2 \approx 0,693$; $\ln 10 \approx 2,303$; $e \approx 2,718$.
- Les courbes de $\exp$ et $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

2 Les propriétés algébriques

■ Pour $a > 0$, $b > 0$ et n entier

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ (relation fonctionnelle)
- $\ln(1/a) = -\ln a$
- $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$
- $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

■ Exemples

- $\ln 8 - \ln 2 = \ln 4 = 2 \ln 2$
- $\ln 50 = \ln 2 + 2 \ln 5$
- $\ln(e^3) - \ln \sqrt{e} = 3 - \frac{1}{2} = 5/2$

Piège : il n'y a **aucune formule** pour $\ln(a + b)$. Et $(\ln a)^2$ n'est pas $\ln(a^2) = 2 \ln a$.

3 Résoudre une équation ou une inéquation

■ La méthode

1. **Ensemble de validité** : tout ce qui est dans un $\ln$ doit être strictement positif.
2. Se ramener à $\ln A = \ln B$ (ou $\ln A < \ln B$), ou à $e^A = k$.
3. Utiliser : $\ln A = \ln B \iff A = B$ et $\ln A < \ln B \iff A < B$.
4. Ne garder que les solutions de l'ensemble de validité.

■ Exemples types

- $e^{2x} = 5 \iff 2x = \ln 5 \iff x = \ln 5 / 2 \approx 0,80$.
- $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 6$: validité $x > 1$, puis $x^2 - x - 6 = 0$, solutions 3 et -2. On ne garde que **3**.
- Plus petit entier n tel que $1,02^n \geq 2$: $n \geq \ln 2 / \ln 1,02 \approx 35,003$, donc **$n = 36$** .
- Si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$: en divisant par $\ln a$, **le sens de l'inégalité change**.

4 Étude de la fonction $\ln$

■ Dérivée et variations

- $\ln'(x) = 1/x$ pour $x > 0$: $\ln$ est strictement croissante.
- $\ln$ est **concave** ($\ln''(x) = -1/x^2 < 0$).
- Tangente en 1 : $y = x - 1$, et $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.
- $\ln x < 0$ sur $]0; 1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1; +\infty[$.

■ Limites

- $\lim \ln x = +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ (mais très lentement).
- $\lim \ln x = -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$: l'axe des ordonnées est asymptote verticale.
- $\lim \ln(1 + x) / x = 1$ quand $x \rightarrow 0$.

5 Croissances comparées et fonctions $\ln(u)$

■ Croissances comparées ($n \geq 1$)

- $\ln x / x^n \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$
- $x^n \ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$
- À retenir : les puissances de x l'emportent sur $\ln$.
- Attention : $\ln x / x$ en 0^+ n'est pas une forme indéterminée, la limite est $-\infty$.

■ Dériver $\ln(u)$

- Si u est dérivable et **strictement positive** : $(\ln u)' = u' / u$.
- $\ln(u)$ a les mêmes variations que u .
- Exemple : $(\ln(3x + 2))' = 3 / (3x + 2)$, sans oublier le 3.